第 13 講　応用漸化式

13　次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$a_{n+1}=2a_n+3b_n$，　$b_{n+1}=a_n+2b_n$，　$a_1=b_1=1$

(2)　$a_{n+1}=\dfrac{a_n+6}{a_n+2}$，　$a_1=3$

(3)　$a_{n+2}-2a_{n+1}-8a_n=9$，　$a_1=0$，　$a_2=1$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 13 講　応用漸化式

13　次の各問いに答えよ．

(1)　次の文中の **あ** ～ **え** にあてはまる数や式を答えよ．

$a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{7a_n-9}{a_n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ には次の関係式が成り立つ．

$$\frac{1}{a_{n+1}-\boxed{\text{あ}}}=\frac{\boxed{\text{い}}}{a_n-\boxed{\text{あ}}}+\frac{1}{\boxed{\text{う}}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

これより，一般項 a_n は，$a_n=$ **え** となる．

(2)　次式

$$\begin{cases} a_1=1 \\ b_1=-1 \end{cases} \text{かつ} \begin{cases} a_{n+1}=4a_n-2b_n \\ b_{n+1}=a_n+b_n \end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が定義されているとする．すべての自然数 n に対し $a_{n+1}+pb_{n+1}=q(a_n+pb_n)$ を満たす定数 p，q を 2 組求めることによって，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　(あ) 1，(い) 2，(う) 3，(え) $\dfrac{n+3}{2n+1}$

㋑　(あ) 2，(い) 3，(う) 2，(え) $\dfrac{2n+5}{n+2}$

㋒　(あ) 3，(い) 1，(う) 4，(え) $\dfrac{3n+7}{n+1}$

(2)　㋐　$(p,\ q)=(-2,\ 2)$，$(-1,\ 3)$，$a_n=4\cdot 3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}$，$b_n=2\cdot 3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}$

㋑　$(p,\ q)=(2,\ -2)$，$(1,\ -3)$，$a_n=4(-3)^{n-1}-3(-2)^{n-1}$，$b_n=2(-3)^{n-1}-3(-2)^{n-1}$

㋒　$(p,\ q)=(2,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$a_n=4\cdot 3^{n-1}-3(-2)^{n-1}$，$b_n=2\cdot 3^{n-1}-3(-2)^{n-1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 13 講　応用漸化式

13　次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$a_{n+1}=2a_n+3b_n$，　$b_{n+1}=a_n+2b_n$，　$a_1=b_1=1$

(2)　$a_{n+1}=\dfrac{a_n+6}{a_n+2}$，　$a_1=3$

(3)　$a_{n+2}-2a_{n+1}-8a_n=9$，　$a_1=0$，　$a_2=1$

【答】 (1) $a_n=\dfrac{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{n-1}+(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^{n-1}}{2}$，

$$b_n=\frac{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{n-1}-(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^{n-1}}{2\sqrt{3}}$$

(2) $a_n=\dfrac{12(-4)^{n-1}+3}{6(-4)^{n-1}-1}$　(3) $a_n=\dfrac{4^n-(-2)^n-6}{6}$

【解答】

(1)　$a_{n+1}+\sqrt{3}\,b_{n+1}=(2+\sqrt{3})a_n+(3+2\sqrt{3})b_n=(2+\sqrt{3})(a_n+\sqrt{3}\,b_n)$ より

$$a_n+\sqrt{3}\,b_n=(a_1+\sqrt{3}\,b_1)\cdot(2+\sqrt{3})^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n+\sqrt{3}\,b_n=(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{n-1}\quad\cdots\cdots①$$

同様に $a_{n+1}-\sqrt{3}\,b_{n+1}=(2-\sqrt{3})(a_n-\sqrt{3}\,b_n)$ より

$$a_n-\sqrt{3}\,b_n=(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^{n-1}\quad\cdots\cdots②$$

を得る．

①，②より

$$\boldsymbol{a_n=\frac{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{n-1}+(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^{n-1}}{2}}$$

$$\boldsymbol{b_n=\frac{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{n-1}-(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^{n-1}}{2\sqrt{3}}}$$

(2)　与式より

$$a_{n+1}+3=\frac{a_n+6}{a_n+2}+3=\frac{4(a_n+3)}{a_n+2}\quad\cdots\cdots③$$

である．ここで，2 以上のある自然数 n で $a_n=-3$ であるとすると，③により $a_{n-1}=\cdots\cdots=a_2=a_1=-3$ となり，$a_1=3$ に矛盾．よってすべての自然数 n に対して $a_n\neq-3$ である．

ゆえに，③より

$$\frac{1}{a_{n+1}+3}=\frac{a_n+2}{4(a_n+3)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{a_n+3}$$

と変形できるが，これは

$$\frac{1}{a_{n+1}+3}-\frac{1}{5}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_n+3}-\frac{1}{5}\right)$$

とできるので，このことより

$$\frac{1}{a_n+3}-\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{a_1+3}-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって

$$\boldsymbol{a_n=\frac{12(-4)^{n-1}+3}{6(-4)^{n-1}-1}}$$

を得る.

(3)　与式は $a_{n+2}+2a_{n+1}+3=4(a_{n+1}+2a_n+3)$ と変形できるので,

$$a_{n+1}+2a_n+3=(a_2+2a_1+3)\cdot 4^{n-1}=4^n$$

を得る.

　また与式は $a_{n+2}-4a_{n+1}-3=-2(a_{n+1}-4a_n-3)$ と変形できるので,

$$a_{n+1}-4a_n-3=(a_2-4a_1-3)\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^n$$

を得る.

　得られた２つの式の辺々の差をとると

$$6a_n+6=4^n-(-2)^n$$

ゆえに

$$\boldsymbol{a_n=\frac{4^n-(-2)^n-6}{6}}$$

となる.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 13 講　応用漸化式

13　次の各問いに答えよ．

(1)　次の文中の［あ］〜［え］にあてはまる数や式を答えよ．

$a_1=5,\ a_{n+1}=\dfrac{7a_n-9}{a_n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ には次の関係式が成り立つ．

$$\frac{1}{a_{n+1}-\boxed{\text{あ}}}=\frac{\boxed{\text{い}}}{a_n-\boxed{\text{あ}}}+\frac{1}{\boxed{\text{う}}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

これより，一般項 a_n は，$a_n=$［え］となる．

(2)　次式

$$\begin{cases}a_1=1\\ b_1=-1\end{cases}\ \text{かつ}\ \begin{cases}a_{n+1}=4a_n-2b_n\\ b_{n+1}=a_n+b_n\end{cases}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が定義されているとする．すべての自然数 n に対し $a_{n+1}+pb_{n+1}=q(a_n+pb_n)$ を満たす定数 p，q を 2 組求めることによって，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　(あ)　1，(い)　2，(う)　3，(え)　$\dfrac{n+3}{2n+1}$

㋑　(あ)　2，(い)　3，(う)　2，(え)　$\dfrac{2n+5}{n+2}$

㋒　(あ)　3，(い)　1，(う)　4，(え)　$\dfrac{3n+7}{n+1}$

(2)　㋐　$(p,\ q)=(-2,\ 2),\ (-1,\ 3)$，$a_n=4\cdot3^{n-1}-3\cdot2^{n-1}$，$b_n=2\cdot3^{n-1}-3\cdot2^{n-1}$

㋑　$(p,\ q)=(2,\ -2),\ (1,\ -3)$，$a_n=4(-3)^{n-1}-3(-2)^{n-1}$，
$b_n=2(-3)^{n-1}-3(-2)^{n-1}$

㋒　$(p,\ q)=(2,\ 2),\ (1,\ 3)$，$a_n=4\cdot3^{n-1}-3(-2)^{n-1}$，$b_n=2\cdot3^{n-1}-3(-2)^{n-1}$

【答】 (1) ㋒　(2) ㋐

【解答】

(1)　与式より

$$\begin{aligned}a_{n+1}-3&=\frac{7a_n-9}{a_n+1}-3\\ &=\frac{4(a_n-3)}{a_n+1}\end{aligned}$$

となるが，これと $a_1=5$ より帰納的に $a_n\neq3$　よって

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\frac{1}{a_{n+1}-3}=\frac{a_n+1}{4(a_n-3)}$$
$$=\frac{1}{a_n-3}+\frac{1}{4}$$

ゆえに数列 $\left\{\frac{1}{a_n-3}\right\}$ は初項 $\frac{1}{a_1-3}=\frac{1}{2}$，公差 $\frac{1}{4}$ の等差数列となるので

$$\frac{1}{a_n-3}=\frac{1}{2}+(n-1)\times\frac{1}{4}$$
$$=\frac{n+1}{4}$$
$$\therefore\quad a_n-3=\frac{4}{n+1}$$

ゆえに

$$a_n=\frac{4}{n+1}+3=\boldsymbol{\frac{3n+7}{n+1}}$$

(2)　与式より

$$\begin{cases} a_{n+1}=4a_n-2b_n & \cdots\cdots① \\ b_{n+1}=a_n+b_n & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①＋②×p を計算すると，

$$a_{n+1}+pb_{n+1}=(4a_n-2b_n)+p(a_n+b_n)$$
$$=(4+p)a_n+(-2+p)b_n$$

この右辺が $q(a_n+pb_n)$ と一致するので

$$\begin{cases} 4+p=q \\ -2+p=pq \end{cases}\quad \text{すなわち}\quad \begin{cases} 4+p=q \\ -2+p=p(4+p) \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4+p=q \\ (p+1)(p+2)=0 \end{cases}$$
$$\boldsymbol{(p,\ q)=(-2,\ 2),\ (-1,\ 3)}$$

よって $a_{n+1}-2b_{n+1}=2(a_n-2b_n)$ より

$$a_n-2b_n=(a_1-2b_1)\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2^{n-1}\quad\cdots\cdots③$$

$a_{n+1}-b_{n+1}=3(a_n-b_n)$ より

$$a_n-b_n=(a_1-b_1)\cdot 3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}\quad\cdots\cdots④$$

④－③より

$$\boldsymbol{b_n=2\cdot 3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}}$$

④×2－③より

$$\boldsymbol{a_n=4\cdot 3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。